

विध्न विचारत भीरु जन, नहीं आरम्भे काम,  
विपति देख छोड़े तुरंत मध्यम मन कर श्याम।  
पुरुष सिंह संकल्प कर, सहते विपति अनेक,  
'बना' न छोड़े ध्येय को, रघुबर राखे टेक।।

रचित: मानव धर्म प्रणेता

सद्गुरु श्री रणछोड़दासजी महाराज

## प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन (Inverse trigonometric functions)

*There are three sides to any argument:  
your side, my side and the right side.*

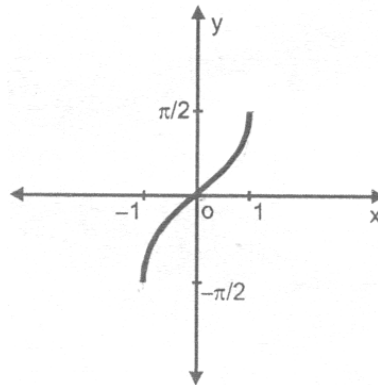
**Introduction :** हम त्रिकोणमितीय फलनों जैसे  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\tan x$ ,  $\operatorname{cosec} x$ ,  $\sec x$ ,  $\cot x$  के बारे में पढ़ चुके हैं, जिनके कि

प्रान्त क्रमशः  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R} - \{(2n+1)\pi/2\}$ ,  $\mathbb{R} - \{n\pi\}$ ,  $\mathbb{R} - \{(2n+1)\pi/2\}$ ,  $\mathbb{R} - \{n\pi\}$  और परिसर क्रमशः  $[-1, 1]$ ,  $[-1, 1]$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R} - (-1, 1)$ ,  $\mathbb{R} - (-1, 1)$ ,  $\mathbb{R}$  है।

**$\sin^{-1}x$  :** प्रतीक  $\sin^{-1}x$  या  $\arcsin x$  कोण  $\theta$  को इस तरह निरूपित कहते हैं कि  $\sin \theta = x$ . इसका सीधा अर्थ है कि  $\sin^{-1}x$  एक फलन नहीं है क्योंकि यह फलन होने के लिये आवश्यक नियमों का संतुष्ट नहीं करता है, लेकिन उपयुक्त विकल्प के रूप में  $[-1, 1]$  को प्रान्त के रूप में और मानक समुच्चय  $[-\pi/2, \pi/2]$  को इसके परिसर रूप में लेने पर  $\sin^{-1}x$  एक एकल मान फलन (single valued function) बन जाता है।

अतः  $\sin^{-1}x$  को प्रान्त  $[-1, 1]$  और परिसर  $[-\pi/2, \pi/2]$  में एक फलन के रूप में लिया जा सकता है।

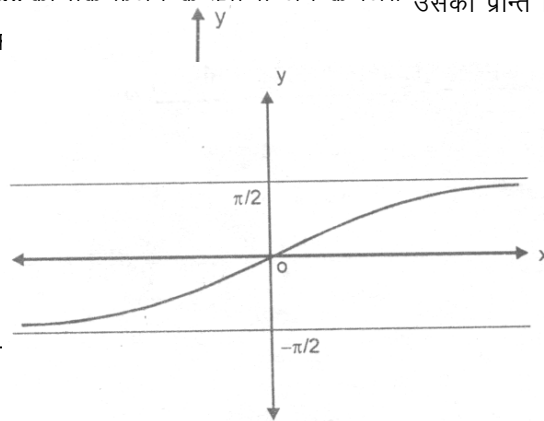
$y = \sin^{-1}x$  का आलेख नीचे दर्शाया गया है, जिसे  $y = \sin x$  के  $x = \pi/2$  से  $\pi/2$  तक के भाग को रेखा  $y = x$  पर दर्पण प्रतिबिम्ब लेकर प्राप्त किया गया है।



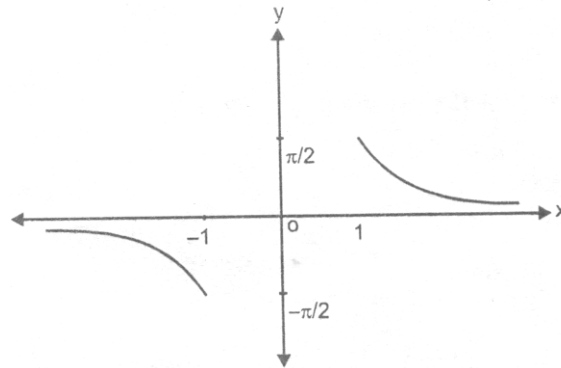
**$\cos^{-1}x$  :** ऊपर दिये गये कथनों के अनुसार  $\cos^{-1}x$  या  $\arccos x$  को एक फलन को तरह लिया जाता है जिसका प्रान्त  $[-1, 1]$  और परिसर  $[0, \pi]$  है।

$y = \cos^{-1}x$  का आलेख भी इसी तरह  $y = \cos x$  के  $x = 0$  से  $x = \pi$  तक के भाग को रेखा  $y = x$  पर दर्पण प्रतिबिम्ब लेकर प्राप्त किया गया है।

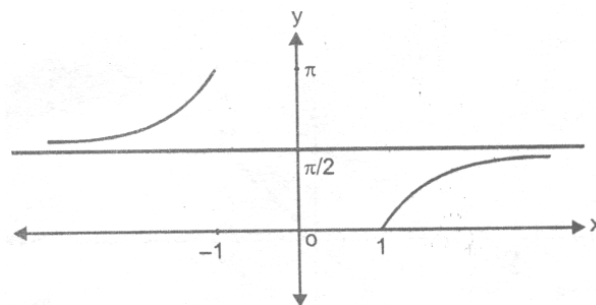
**$\tan^{-1}x$  :**  $\tan^{-1}x$  या  $\arctan x$  एक फलन है जिसका प्रान्त  $\mathbb{R}$  और परिसर  $(-\pi/2, \pi/2)$  रखते हैं।  $y = \tan^{-1}x$  का आलेख



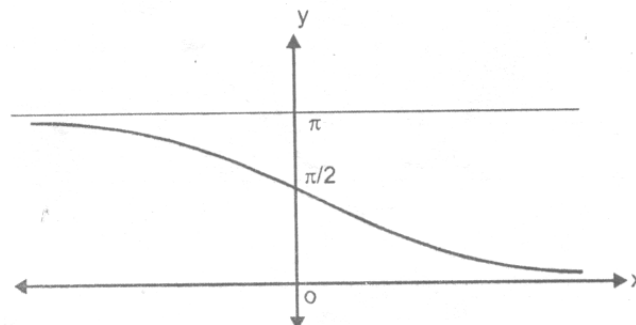
**$\operatorname{cosec}^{-1}x$  :**  $\operatorname{cosec}^{-1}x$  या  $\operatorname{arccosec} x$  एक फलन है जिसका प्रान्त  $\mathbb{R} - (-1, 1)$  और परिसर  $[-\pi/2, \pi/2] - \{0\}$  लेते हैं।  $y = \operatorname{cosec}^{-1}x$  का आलेख



**$\sec^{-1}x$  :**  $\sec^{-1}x$  या  $\operatorname{arcsec} x$  एक फलन है जिसका प्रान्त  $\mathbb{R} - (-1, 1)$  और परिसर  $[0, \pi] - \{\pi/2\}$  है।  $y = \sec^{-1}x$  का आलेख



**$\cot^{-1}x$  :**  $\cot^{-1}x$  या  $\operatorname{arccot} x$  एक फलन है जिसका प्रान्त  $\mathbb{R}$  और परिसर  $(0, \pi)$  है।  $y = \cot^{-1}x$  का आलेख



**Property 1 : “-x”**

$\sin^{-1}x$ ,  $\tan^{-1}x$ ,  $\operatorname{cosec}^{-1}x$  के आलेख मूलबिन्दु के सापेक्ष सममित है।

अतः हम कह सकते हैं कि  $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}x$   
 $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1}x$   
 $\operatorname{cosec}^{-1}(-x) = -\operatorname{cosec}^{-1}x$ .

तथा  $\cos^{-1}x$ ,  $\sec^{-1}x$ ,  $\cot^{-1}x$  के आलेख बिन्दु  $(0, \pi/2)$  के सापेक्ष सममित है, इससे हम कह सकते हैं कि

$$\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}x$$

$$\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1}x$$

$$\cot^{-1}(-x) = \pi - \cot^{-1}x.$$

**Property 2 : T(T<sup>-1</sup>)**

(i)  $\sin(\sin^{-1}x) = x$ ,  $-1 \leq x \leq 1$

Proof : माना  $\theta = \sin^{-1}x$ . तो  $x \in [-1, 1]$  और  $[-\pi/2, \pi/2]$ .

$\Rightarrow \sin \theta = x$ , प्रतीक के अर्थ द्वारा

$\Rightarrow \sin(\sin^{-1}x) = x$

इसी तरह हम निम्न का सिद्ध कर सकते हैं।

(ii)  $\cos(\cos^{-1}x) = x$ ,  $-1 \leq x \leq 1$

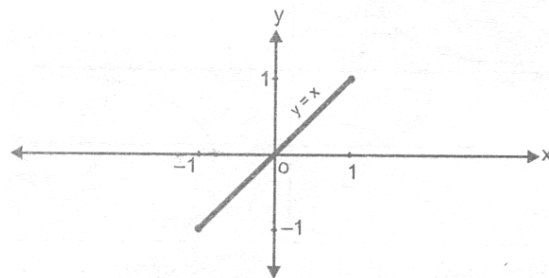
(iii)  $\tan(\tan^{-1}x) = x$ ,  $x \in \mathbb{R}$

(iv)  $\cot(\cot^{-1}x) = x$ ,  $x \in \mathbb{R}$

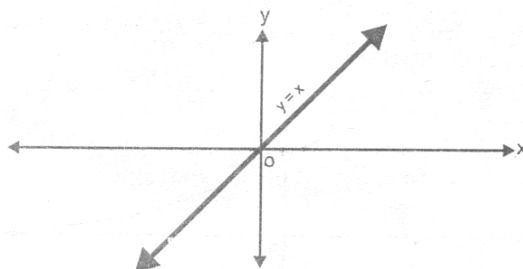
(v)  $\sec(\sec^{-1}x) = x$ ,  $x \leq -1, x \geq 1$

(vi)  $\operatorname{cosec}(\operatorname{cosec}^{-1}x) = x$ ,  $|x| \geq 1$

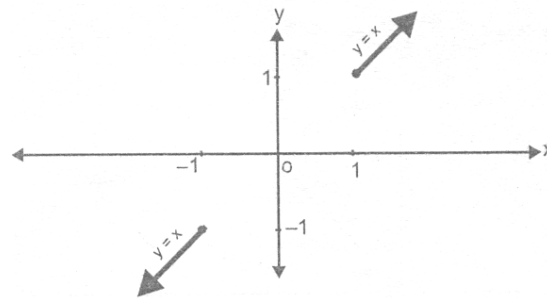
$y = \sin(\sin^{-1}x)^{-1} \equiv \cos(\cos^{-1}x)$  का आलेख



$y = \tan(\tan^{-1}x) \equiv \cot(\cot^{-1}x)$  का आलेख



$y = \operatorname{cosec}(\operatorname{cosec}^{-1}x) \equiv \sec(\sec^{-1}x)$  का आलेख



**Property 3 :  $T^{-1}(T)$**

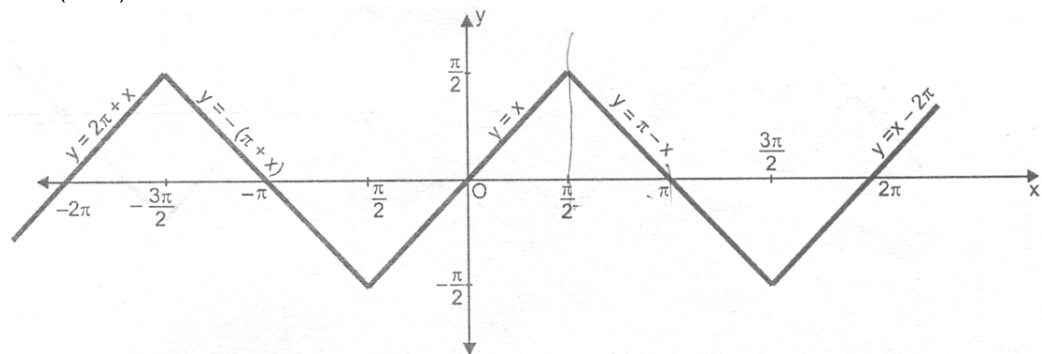
(i) 
$$\sin^{-1}(\sin x) = \begin{cases} -2n\pi + x, & x \in [2n\pi - \pi/2, 2n\pi + \pi/2] \\ 2n+1)\pi - x, & x \in [(2n+1)\pi - \pi/2, (2n+1)\pi + \pi/2], n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Proof : यदि  $x \in [2n\pi - \pi/2, 2n\pi + \pi/2]$ , तो  $-2n\pi + x \in [-\pi/2, \pi/2]$  और  $\sin(-2n\pi + x) = \sin x$ .

अतः  $\sin^{-1}(\sin x) = -2n\pi + x$  for  $x \in [2n\pi - \pi/2, 2n\pi + \pi/2]$ .

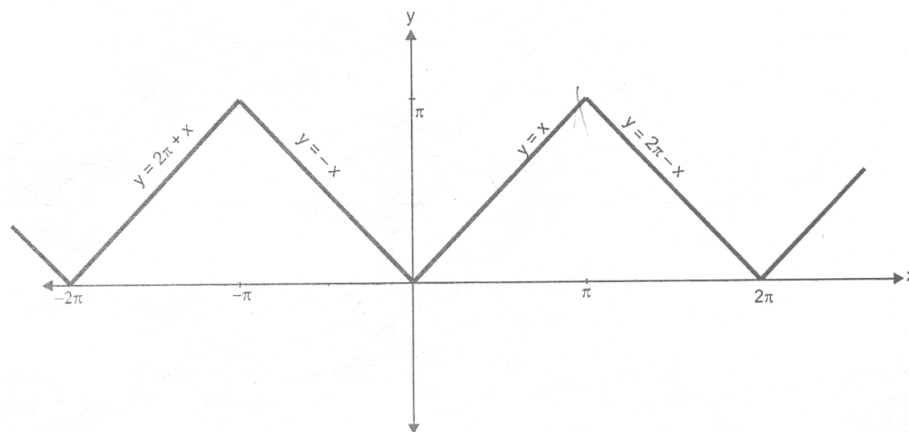
$2^{\text{nd}}$  भाग का सत्यापन स्वयं करे।

$y = \sin^{-1}(\sin x)$  का आलेख

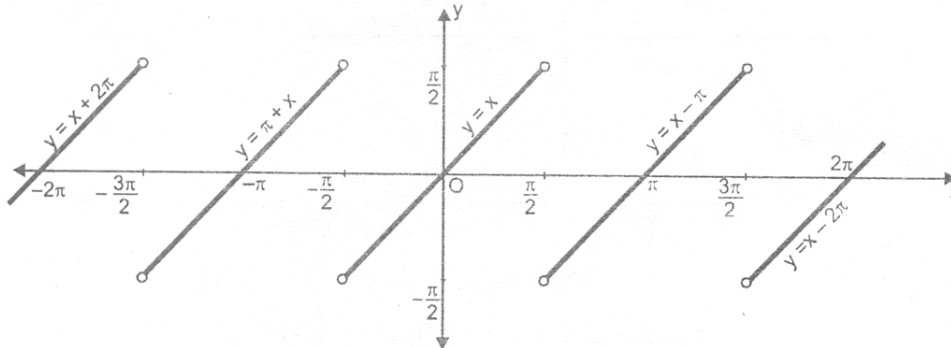


(ii) 
$$\cos^{-1}(\cos x) = \begin{cases} -2n\pi + x, & x \in [2n\pi, (2n+1)\pi] \\ 2n\pi - x, & x \in [(2n-1)\pi, 2n\pi], n \in \mathbb{I} \end{cases}$$

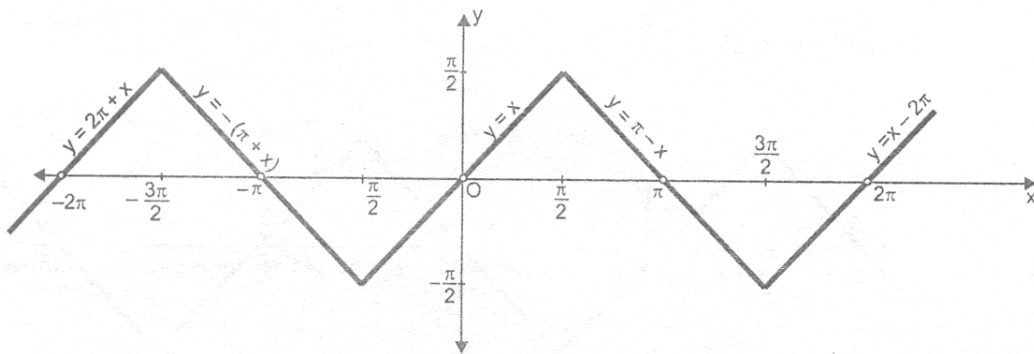
$y = \cos^{-1}(\cos x)$  का आलेख



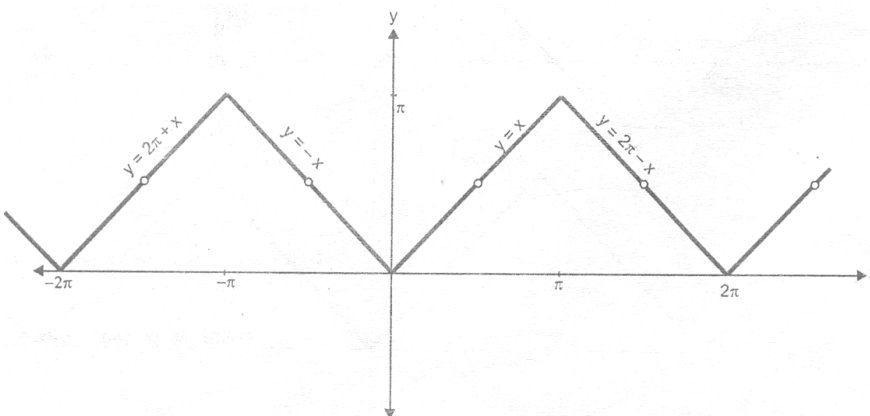
- (iii)  $\tan^{-1}(\tan x) = -n\pi + x, \pi/2 < x < n\pi + \pi/2, n \in \mathbb{Z}$   
 $y = \tan^{-1}(\tan x)$  का आलेख



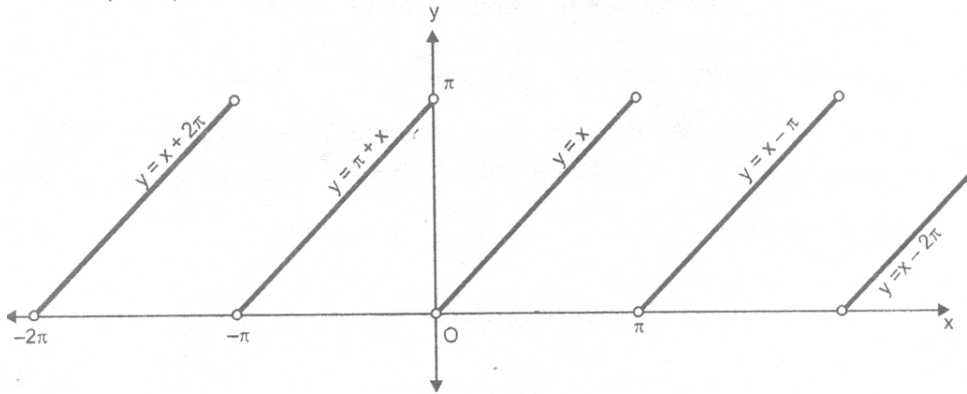
- (iv)  $\operatorname{cosec}^{-1}(\operatorname{cosec} x)$  का आलेख भी  $\sin^{-1} \sin x$  के समान ही है।  
 $y = \operatorname{cosec}^{-1}(\operatorname{cosec} x)$  का आलेख



- (v)  $\sec^{-1}(\sec x)$  का आलेख  $\cos^{-1}(\cos x)$  के समान है।  
 $y = \sec^{-1}(\sec x)$  का आलेख



- (vii)  $\cot^{-1}(\cot x) = -n\pi + x, x \in (n\pi, (n+1)\pi), n \in \mathbb{Z}$   
 $y = \cot^{-1}(\cot x)$  का आलेख



**Remark :**  $\sin(\sin^{-1}x), \cos(\cos^{-1}x), \dots, \cot(\cot^{-1}x)$  अनावृत्तिक (non periodic) फलन है जबकि  $\sin^{-1}(\sin x), \dots, \cot^{-1}(\cot x)$  आवृत्ति फलन है।

**Property 4 : “1/x”**

- (i)  $\operatorname{cosec}^{-1}(x) = \sin^{-1}(1/x), |x| \geq 1$   
हल: माना  $\operatorname{cosec}^{-1}x = \theta$   
 $\Rightarrow 1/x = \sin \theta$   
 $\Rightarrow \sin^{-1}(1/x) = \sin^{-1}(\sin \theta)$   
 $= \theta$  (as  $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ ) =  $\operatorname{cosec}^{-1}x$
- (ii)  $\sec^{-1}x = \cos^{-1}\{1/x\}, |x| \geq 1$
- (iii)  $\cot^{-1}x = \begin{cases} \tan^{-1}\{1/x\}, & x > 0 \\ \pi + \tan^{-1}(1/x), & x < 0 \end{cases}$

**Property 5 : “ $\pi/2$ ”**

- (i)  $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}, -1 \leq x \leq 1$   
हल: माना  $A = \sin^{-1}x$  और  $B = \cos^{-1}x$   
 $\Rightarrow \sin A = x$  और  $\cos B = x$   
 $\Rightarrow \sin A = \cos B$   
 $\Rightarrow \sin A = \sin(\pi/2 - B)$   
 $\Rightarrow A = \pi/2 - B$  क्योंकि  $A$  और  $\pi/2 - B \in [-\pi/2, \pi/2]$   
 $\Rightarrow A + B = \pi/2$ .

इसी तरह हम कह सकते हैं कि

- (ii)  $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}, x \in \mathbb{R}$
- (iii)  $\operatorname{cosec}^{-1}x + \sec^{-1}x = \frac{\pi}{2}, |x| \geq 1$

**Property 6:** योग व अन्तर की सर्वसमिकाएँ (Identities on addition and subtraction):

- (i)  $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \sin^{-1}\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right), x \geq 0, y \geq 0$  एवं  $(x^2 + y^2) \leq 1$   
 $= \pi - \sin^{-1}\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right), x \geq 0, y \geq 0$  एवं  $x^2 + y^2 \geq 1$

हल: माना  $A = \sin^{-1} x$  और  $B = \sin^{-1} y$  जहाँ  $x, y \in [0, 1]$

$$\sin(A + B) = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$$

$$\Rightarrow \sin^{-1} \sin(A + B) = \sin^{-1} \left( x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \right)$$

$$\Rightarrow \sin^{-1} \left( x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \right)$$

$$= \begin{cases} A + B & \text{जब } 0 \leq A + B \leq \pi/2 \\ \pi - (A + B) & \text{जब } \pi/2 \leq A + B \leq \pi \end{cases} = \begin{cases} \sin^{-1} x + \sin^{-1} y, & x^2 + y^2 \leq 1 \\ \pi - (\sin^{-1} x + \sin^{-1} y), & x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$$

$$(ii) \sin^{-1} x - \sin^{-1} y = \sin^{-1} \left( x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2} \right); x, y \in [0, 1]$$

$$(iii) \cos^{-1} x + \cos^{-1} y = \cos^{-1} \left( xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \right); x, y \in [0, 1]$$

$$(iv) \cos^{-1} x - \cos^{-1} y = \begin{cases} \cos^{-1} \left( xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \right); & x, y \in [0, 1] \\ -\cos^{-1} \left( xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \right); & 0 \leq x < y \leq 1 \end{cases}$$

$$(v) \tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \begin{cases} \pi/2 & \text{यदि } x, y > 0 \text{ \& } xy = 1 \\ -\pi/2 & \text{यदि } x, y < 0 \text{ \& } xy = 1 \\ \tan^{-1} \left( \frac{x+y}{1-xy} \right) & \text{यदि } x, y \geq 0 \text{ \& } xy < 1 \\ \pi + \tan^{-1} \left( \frac{x+y}{1-xy} \right) & \text{यदि } x, y \geq 0 \text{ \& } xy > 1 \end{cases}$$

$$(vi) \tan^{-1} x - \tan^{-1} y = \tan^{-1} \left( \frac{x-y}{1+xy} \right); x \geq 0, y \geq 0$$

नोट : (i)  $x^2 + y^2 \leq 1$  &  $x, y \geq 0 \Rightarrow 0 \leq \sin^{-1} x + \sin^{-1} y \leq \frac{\pi}{2}$  और  $x^2 + y^2 \geq 1$  &  $x, y \geq 0$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} x + \sin^{-1} y \leq \pi$$

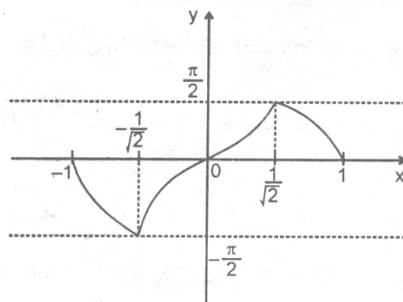
(ii)  $xy < 1$  और  $x, y \geq 0 \Rightarrow \tan^{-1} x + \tan^{-1} y < \frac{\pi}{2}$ ;  $xy > 1$  और  $x, y \geq 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \tan^{-1} x + \tan^{-1} y < \pi$

(iii)  $x < 0$  या  $y > 0$  के लिए इन सर्वसमिकाओं को गुणधर्म “-x” की सहायता से प्रयुक्त कर सकते हैं।  
 अर्थात्  $x$  को  $-x$  एवं  $y$  को  $-y$  में बदलते हैं जो कि धनात्मक है।

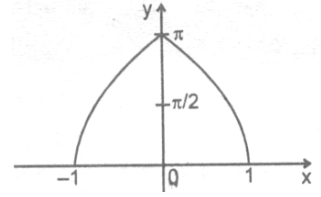
### Property 7 : कुछ उपयोग सर्वसमिकाएँ (More useful identities)

$$(i) \sin^{-1} \left( 2x\sqrt{1-x^2} \right) = \begin{cases} 2\sin^{-1} x & \text{यदि } |x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \pi - 2\sin^{-1} x & \text{यदि } \frac{1}{\sqrt{2}} < x \leq 1 \\ -(\pi + 2\sin^{-1} x) & \text{यदि } -1 \leq x < -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$y = \sin^{-1} \left( 2x\sqrt{1-x^2} \right)$  का ग्राफ

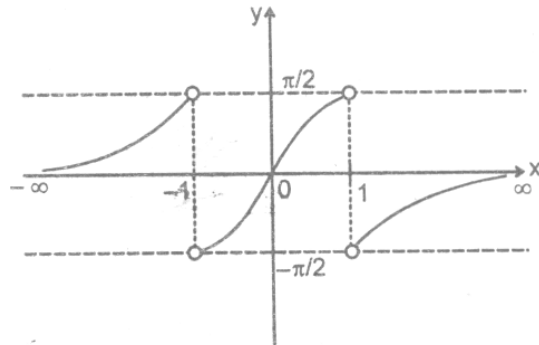


(ii)  $\cos^{-1}(2x^2 - 1) = \begin{cases} 2 \cos^{-1} x & \text{if } 0 \leq x \leq 1 \\ 2\pi - 2 \cos^{-1} x & \text{if } -1 \leq x < 0 \end{cases}$   
 $y = \cos^{-1}(2x^2 - 1)$  का ग्राफ



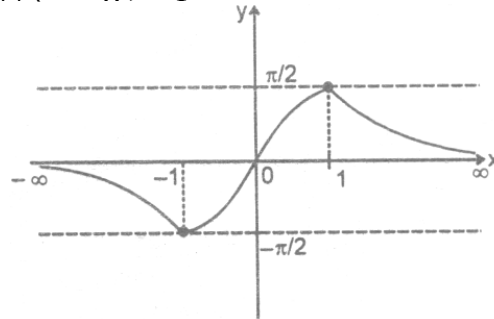
(iii)  $\tan^{-1} \frac{2x}{1-x^2} = \begin{cases} 2 \tan^{-1} x & \text{यदि } |x| < 1 \\ \pi + 2 \tan^{-1} x & \text{यदि } x < -1 \\ -(\pi - 2 \tan^{-1} x) & \text{यदि } x > 1 \end{cases}$

$y = \tan^{-1} \frac{2x}{1-x^2}$  का ग्राफ



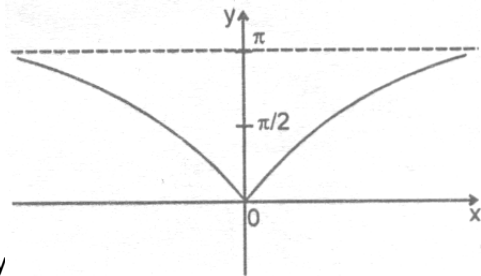
(iv)  $\sin^{-1} \frac{2x}{1+x^2} = \begin{cases} 2 \tan^{-1} x & \text{यदि } |x| \leq 1 \\ \pi + 2 \tan^{-1} x & \text{यदि } x < -1 \\ -(\pi - 2 \tan^{-1} x) & \text{यदि } x > -1 \end{cases}$

$y = \sin^{-1} \frac{2x}{1+x^2}$  का ग्राफ



(v)  $\cos^{-1} \frac{1-x^2}{1+x^2} = \begin{cases} 2 \tan^{-1} x & \text{यदि } x \geq 0 \\ -2 \tan^{-1} x & \text{यदि } x < 0 \end{cases}$

$y = \cos^{-1} \frac{1-x^2}{1+x^2}$  का ग्राफ



(vi) यदि  $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y + \tan^{-1} z = \pi$  तो  $x + y + x = xy$

(vii) यदि  $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y + \tan^{-1} z = \frac{\pi}{2}$  तो  $x + y + x = xyz$

(viii)  $\tan^{-1} 1 + \tan^{-1} 2 + \tan^{-1} 3 = \pi$

(ix)  $\tan^{-1} 1 + \tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{2}$



## Exercise - 1

### 1-A (बहुविकल्पीय प्रश्न)

केवल एक विकल्प सही

- $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  का मान है—  
 (A)  $75^\circ$  (B)  $105^\circ$  (C)  $\frac{5\pi}{12}$  (D)  $\frac{3\pi}{5}$
- $f(x) = \cos^{-1} x + \cos^{-1} x + \operatorname{cosec}^{-1} x$  का प्रस्त है—  
 (A)  $[-1, 1]$  (B)  $\mathbb{R}$  (C)  $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$  (D)  $\{-1, 1\}$
- $f(x) = \sin^{-1} x + \tan^{-1} x + \sec^{-1} x$  का परिसर है—  
 (A)  $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$  (B)  $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$  (C)  $\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$  (D) इनमें से कोई नहीं
- $\operatorname{cosec}^{-1}(\cos x)$  वास्तविक होगा यदि—  
 (A)  $x \in [-1, 1]$  (B)  $x \in \mathbb{R}$  (C)  $x, \frac{\pi}{2}$  का विषम गुणज है (D)  $x, \pi$  का गुणज है।
- यदि  $\cos[\tan^{-1}\{\sin(\cot^{-1}\sqrt{3})\}] = y$  हो तो—  
 (A)  $y = \frac{4}{5}$  (B)  $y = \frac{2}{\sqrt{5}}$  (C)  $y = -\frac{2}{\sqrt{5}}$  (D)  $y^2 = \frac{10}{11}$
- $\tan\left[\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]$  का मान है—  
 (A)  $\frac{6}{17}$  (B)  $\frac{7}{16}$  (C)  $\frac{5}{7}$  (D)  $\frac{17}{6}$
- यदि  $\pi \leq x \leq 2\pi$  हो, तो  $\cos^{-1}(\cos x) =$   
 (A)  $x$  (B)  $\pi - x$  (C)  $2\pi + x$  (D)  $2\pi - x$
- यदि  $\sin^{-1} x + \sin^{-1} y = \frac{2\pi}{3}$  हो, तो  $\cos^{-1} x + \cos^{-1} y =$   
 (A)  $\frac{2\pi}{3}$  (B)  $\frac{\pi}{3}$  (C)  $\frac{\pi}{6}$  (D)  $\pi$
- यदि  $x \geq 0$  तथा  $\theta = \sin^{-1} x + \cos^{-1} x - \tan^{-1} x$  हो, तो —

- (A)  $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$       (B)  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$       (C)  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$       (D)  $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$
10. यदि  $x < 0$  हो तो  $\tan^{-1}(x) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$  का मान है—  
 (A)  $\frac{\pi}{2}$       (B)  $-\frac{\pi}{2}$       (C) 0      (D) इनमें से कोई नहीं
11.  $\tan^{-1} a + \tan^{-1} b$ , (जहाँ  $a > 0, b > 0, ab > 1$ ) का मान है—  
 (A)  $\tan^{-1}\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$       (B)  $\tan^{-1}\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) - \pi$   
 (C)  $\pi + \tan^{-1}\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$       (D)  $\pi - \tan^{-1}\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$
12.  $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$  का मान है—  
 (A)  $\frac{\pi}{4}$       (B)  $\frac{\pi}{2}$       (C)  $\frac{\pi}{3}$       (D) इनमें से कोई नहीं
13.  $\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{5}{13}\right)$  का मान है—  
 (A)  $\cos^{-1}\left(\frac{33}{65}\right)$       (B)  $\cos^{-1}\left(-\frac{33}{65}\right)$       (C)  $\cos^{-1}\left(\frac{64}{65}\right)$       (D) इनमें से कोई नहीं
14. समीकरण  $\sin^{-1} x - \cos^{-1} x = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  का —  
 (A) कोई हल नहीं है।      (B) अद्वितीय हल है।      (C) अनन्त हल है।      (D) इनमें से कोई नहीं
15. यदि  $\sin^{-1} x + \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$  हो, तो  $x =$   
 (A) 0      (B)  $\frac{1}{\sqrt{5}}$       (C)  $\frac{2}{\sqrt{5}}$       (D)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$
16. समीकरण  $\sin^{-1}\left(\tan \frac{\pi}{4}\right) - \sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{3}{x}}\right) - \frac{\pi}{6} = 0$  का हल है—  
 (A)  $x = 2$       (B)  $x = -4$       (C)  $x = 4$       (D) इनमें से कोई नहीं
17. यदि  $\sum_{i=1}^n \cos^{-1} \alpha_i = 0$  हो, तो  $\sum_{i=1}^n \alpha_i =$

- (A) n (B) -n (C) 0 (D) इनमें से कोई नहीं

18. सूत्र  $2 \sin^{-1} x = \sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$  के सत्य होने के लिए 'x' के मानों का समुच्चय है—

- (A) (-1, 0) (B) [0, 1] (C)  $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$  (D)  $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

एक से अधिक विकल्प सही

19. यदि  $\sin^{-1} x + \sin^{-1} y + \sin^{-1} z = \frac{3\pi}{2}$  हो, तो

- (A)  $x^{100} + y^{100} + z^{100} - \frac{9}{x^{101} + y^{101} + z^{101}} = 0$  (B)  $x^{22} + y^{42} + z^{62} - x^{220} - y^{420} - z^{620} = 0$   
 (C)  $x^{50} + y^{25} + z^5 = 0$  (D)  $\frac{x^{2008} + y^{2008} + z^{2008}}{(xyz)^{2009}} = 0$

20. यदि  $\alpha$  असमिका  $x^2 - x - 2 > 0$  को संतुष्ट करता हो, तो निम्नलिखित में से किसका मान विद्यमान होगा—

- (A)  $\sin^{-1} \alpha$  (B)  $\cos^{-1} \alpha$  (C)  $\sec^{-1} \alpha$  (D)  $\operatorname{cosec}^{-1} \alpha$

21.  $6 \sin^{-1}\left(x^2 - 6x + \frac{17}{2}\right) = \pi$  है यदि—

- (A) = 1 (B) x = 2 (C) x = 3 (D) x = 4

1-B (विषयात्मक प्रश्न)

1. निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए—

- (i)  $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$  (ii)  $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$   
 (iii)  $\operatorname{cosec}^{-1}\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$  (iv)  $\sec^{-1}(-\sqrt{2})$   
 (v)  $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

2. निम्नलिखित के मान ज्ञान कीजिए—

- (i)  $\sin\left[\frac{\pi}{3} - \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$  (ii)  $\tan\left[\cos^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]$   
 (iii)  $\sin^{-1}\left[\cos\left\{\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}\right]$

3. निम्नलिखित के ग्राफ खींचिए—

- (i)  $y = \sin^{-1}(x + 1)$  (ii)  $y = \cos^{-1}(3x)$

(iii)  $y = \tan^{-1}(2x - 1)$

4. निम्नलिखित असमिकाओं को हल कीजिए—

(i)  $\sin^{-1} x > -1$

(ii)  $\cos^{-1} x < 2$

(iii)  $\cos^{-1} x < -\sqrt{3}$

5. निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए—

(i)  $\sin\left(\cos^{-1}\frac{3}{5}\right)$

(ii)  $\tan\left(\cos^{-1}\frac{1}{3}\right)$

(iii)  $\cos \operatorname{ec}\left(\sec^{-1}\frac{\sqrt{41}}{5}\right)$

(iv)  $\tan\left(\operatorname{cosec}^{-1}\frac{65}{63}\right)$

(v)  $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \cos^{-1}\frac{1}{4}\right)$

(vi)  $\cos\left(\sin^{-1}\frac{4}{5} + \cos^{-1}\frac{2}{3}\right)$

6.  $\sec\left(\tan\left\{\tan^{-1}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}\right)$  का मान ज्ञात कीजिए—

7. निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए—

(i)  $\sin^{-1}\left(\cos\frac{5\pi}{4}\right)$

(ii)  $\tan^{-1}\left(\tan\frac{2\pi}{3}\right)$

(iii)  $\cos^{-1}\left(\cos\frac{5\pi}{4}\right)$

(iv)  $\sec^{-1}\left(\sec\frac{7\pi}{4}\right)$

8. निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए—

(i)  $\sin^{-1}(\sin 5)$

(ii)  $\cos^{-1}(\cos 10)$

(iii)  $\tan^{-1}(\tan(-6))$

(iv)  $\cot^{-1}(\cot(-10))$

(v)  $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{9\pi}{10} - \sin\frac{9\pi}{10}\right)\right)$

9.  $\sin^{-1}(\sin \theta), \cos^{-1}(\cos \theta), \tan^{-1}(\tan \theta)$  तथा  $\cot^{-1}(\cot \theta)$  का  $\theta \in \left[\frac{3\pi}{2}, 3\pi\right]$  के लिए मान ज्ञात कीजिए—

10. निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए—

(i)  $\cot(\tan^{-1} a + \cot^{-1} a)$

(ii)  $\sin(\sin^{-1} x + \cos^{-1} x), |x| \leq 1$

(iii)  $\tan\left[\cos^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) - \sec^{-1} 3\right]$

11. सिद्ध कीजिए कि—

(i)  $\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{8}{17}\right) = \sin^{-1} \frac{77}{85}$

(ii)  $\cos^{-1} \frac{4}{5} + \cos^{-1} \frac{12}{13} = \cos^{-1} \frac{33}{65}$

(iii)  $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \cot^{-1} 3 = \frac{\pi}{4}$

(iv)  $\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{\pi}{4}$

12.  $\cos(2 \sin^{-1} x) = \frac{1}{3}$  को  $x$  के लिए हल कीजिए—

13. समीकरण  $\cot^{-1} x + \tan^{-1} 3 = \frac{\pi}{2}$  को हल कीजिए—

14. निम्नलिखित समीकरणों का हल कीजिए—

(i)  $\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{x-2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \frac{\pi}{4}$

(ii)  $\sin^{-1} x + \sin^{-1} 2x = \frac{2\pi}{3}$

15. निम्नलिखित समीकरणों को कीजिए—

(i)  $\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1}{2} \tan^{-1} x, (x > 0)$

(ii)  $3 \tan^{-1}\left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$

16. यदि  $x > y > 1$  हो, तो  $\left\{\frac{1}{2} \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) + \frac{1}{2} \cos^{-1}\left(\frac{1-y^2}{1+y^2}\right)\right\}$  का मान ज्ञात कीजिए—

17.  $\sin^{-1}(\cos(\sin^{-1}x)) + \cos^{-1}(\sin(\cos^{-1}x))$  का मान ज्ञात कीजिए।

## Exercise - 2

### 2-A (बहुविकल्पीय प्रश्न)

केवल एक विकल्प सही

1.  $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\cos^{-1}x\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cos^{-1}x\right)$ ,  $x \neq 0$  का मान है—  
 (A)  $x$  (B)  $2x$  (C)  $\frac{2}{x}$  (D)  $\frac{x}{2}$
2. यदि  $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$  हो, तो  $\sin^{-1}[\cos\{\cos^{-1}(\cos x) + \sin^{-1}(\sin x)\}]$  का मान है —  
 (A)  $\frac{\pi}{2}$  (B)  $\frac{\pi}{4}$  (C)  $-\frac{\pi}{4}$  (D)  $-\frac{\pi}{2}$
3. यदि  $\tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} = 4^\circ$  हो, तो—  
 (A)  $x = \tan 2^\circ$  (B)  $x = \tan 4^\circ$  (C)  $x = \tan (1/4)^\circ$  (D)  $x = \tan 8^\circ$
4.  $\cot^{-1}\left\{\frac{\sqrt{1-\sin x} + \sqrt{1+\sin x}}{\sqrt{1-\sin x} - \sqrt{1+\sin x}}\right\}$ ,  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ , का मान है —  
 (A)  $\pi - \frac{\pi}{2}$  (B)  $\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}$  (C)  $\frac{x}{2}$  (D)  $2\pi - \frac{x}{2}$
5. समीकरण  $\sin^{-1}x + \cos^{-1}(1-x) = \sin^{-1}(-x)$  के हलों की संख्या है—  
 (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 2 से अधिक
6.  $\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ ,  $0 \leq x \leq 1$  का न्यूनतम एवं अधिकतम मान है—  
 (A)  $0, \pi$  (B)  $0, \frac{\pi}{4}$  (C)  $-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$  (D)  $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$
7. यदि  $\cos^{-1}\frac{n}{\pi} > \frac{\pi}{6}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  हो, तो  $n$  का अधिकतम मान है—  
 (A) 1 (B) 5 (C) 9 (D) इनमें से कोई नहीं
8. असमिका  $[\cot^{-1}x]^2 - 6[\cot^{-1}x] + 9 \leq 0$  जहाँ  $[\cdot]$  महत्तम पूर्णांक फलन को दर्शाता है, के सम्पूर्ण हलों का समुच्चय है—  
 (A) 1 (B) 5 (C) 9 (D) इनमें से कोई नहीं
9. यदि  $\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{3\sin 2\theta}{5+4\cos 2\theta}\right) = \frac{\pi}{4}$  हो, तो  $\tan \theta$  का मान है—  
 (A)  $1/3$  (B) 3 (C) 1 (D) -1

-----  
 एक से अधिक सही

10.  $\cos\left[\frac{1}{2}\cos^{-1}\left\{\cos\left(-\frac{14\pi}{5}\right)\right\}\right]$  का मान है-

- (A)  $\cos\left(-\frac{7\pi}{5}\right)$  (B)  $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$  (C)  $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$  (D)  $-\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$

11.  $x$  के किन मानों के लिए  $\sin^{-1}x > \cos^{-1}x$  सत्य है-

- (A)  $x$  के सभी मानों के लिए (B)  $x \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$   
 (C)  $x \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$  (D)  $x = 0.75$

12. यदि  $0 < x < 1$  हो, तो  $\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x}$  का मान है-

- (A)  $\frac{1}{2}\cos^{-1}x$  (B)  $\cos^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{2}}$  (C)  $\sin^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{2}}$  (D)  $\frac{1}{2}\tan^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

13. यदि  $\cos^{-1}x = \tan^{-1}x$ , तो -

- (A)  $x^2 = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$  (B)  $x^2 = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$   
 (C)  $\sin(\cos^{-1}x) = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$  (D)  $\tan(\cos^{-1}x) = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

14.  $\sum_{n=1}^{\infty} \tan^{-1}\frac{4n}{n^4 - 2n^2 + 2}$  का मान है-

- (A)  $\tan^{-1}2 + \tan^{-1}3$  (B)  $4\tan^{-1}1$  (C)  $\pi/2$  (D)  $\sec^{-1}(-\sqrt{2})$

.....  
**2-B (विषयात्मक प्रश्न)**  
 .....

1. यदि  $X = \cos \operatorname{cosec} \tan^{-1} \cos \cot^{-1} \sec \sin^{-1} a$  और  $Y = \sec \cot^{-1} \sin \tan^{-1} \cos \operatorname{cosec} \cos^{-1} a$ ; जहाँ  $0 \leq a \leq 1$  हो तो  $X$  एवं  $Y$  के मध्य सम्बन्ध ज्ञात कीजिए। उसका  $a$  के पदों में विस्तार कीजिए।

2. यदि  $f(x) = \cos^{-1}x + \cos^{-1}\left\{\frac{x}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3-3x^2}}\right\}$  हो, तो निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए-

- (i)  $f\left(\frac{2}{3}\right)$  (ii)  $f\left(\frac{1}{3}\right)$ :

3. निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए—

$$(i) \quad \tan^{-1} x = -\pi + \cot^{-1} \frac{1}{x} = \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = -\cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \text{ when } x < 0.$$

$$(ii) \quad \cos^{-1} x = \sec^{-1} \frac{1}{x} = \pi - \sin^{-1} \sqrt{1-x^2} = \pi + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \cot^{-1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \text{ when } -1 < x < 0$$

4. यदि  $a \sin^{-1} x - b \cos^{-1} x = c$  हो, तो  $\sin^{-1} x + b \cos^{-1} x$  का मान ज्ञात कीजिए।

5. निम्नलिखित असमिकाओं को हल कीजिए—

$$(i) \quad \cos^{-1} x > \cos^{-1} x^2$$

$$(ii) \quad \tan^{-1} x > \cot^{-1} x.$$

$$(iii) \quad \operatorname{arccot}^2 x - 5 \operatorname{arccot} x + 6 > 0$$

6. समीकरण  $\sin^2(2 \sin^{-1}(\tan x)) = 1$  को संतुष्ट करने वाले  $x$  के मानों की संख्या ज्ञात कीजिए।

7. निम्नलिखित समीकरण को हल कीजिए—

$$\sec^{-1} \frac{x}{a} - \sec^{-1} \frac{x}{b} = \sec^{-1} b - \sec^{-1} a \quad a \geq 1; b \geq 1, a \neq b.$$

8. सिद्ध कीजिए कि  $\alpha < \frac{1}{32}$  के लिए समीकरण  $(\sin^{-1} x)^3 + (\cos^{-1} x)^3 = \alpha \pi^3$  का कोई मूल विद्यमान नहीं है।

9. निम्नलिखित श्रेणियों का योगफल ज्ञात कीजिए—

$$(i) \quad \tan^{-1} \frac{1}{x^2 + x + 1} + \tan^{-1} \frac{1}{x^2 + 3x + 3} + \tan^{-1} \frac{1}{x^2 + 5x + 7} + \tan^{-1} \frac{1}{x^2 + 7x + 13} \dots n$$

$$(ii) \quad \tan^{-1} \frac{1}{3} + \tan^{-1} \frac{2}{9} + \dots + \tan^{-1} \frac{2^{n-1}}{1 + 2^{2n-1}} + \dots \dots \dots \infty$$

$$(iii) \quad \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} + \sin^{-1} \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}} + \dots + \sin^{-1} \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n(n+1)}} + \dots \dots \dots \infty$$

10. (i) समीकरण  $\tan^{-1} x + \cot^{-1} y = \tan^{-1} 3$  के सभी धनात्मक पूर्णांक हल ज्ञात कीजिए।

(ii) यदि 'k' धनात्मक पूर्णांक हो, तो प्रदर्शित कीजिए कि समीकरण  $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1} k$  का कोई अशून्य पूर्णांक हल नहीं होता है।



11. यदि  $0 < x < 1$  के लिए  $\alpha = 2 \tan^{-1} \left( \frac{1+x}{1-x} \right)$  तथा  $\beta = \sin^{-1} \left( \frac{1-x^2}{1+x^2} \right)$  हो, तो सिद्ध कीजिए कि  $\alpha + \beta = \pi$ . यदि  $x > 1$  हो, तो  $\alpha + \beta$  का मान क्या होगा ?
12. यदि  $\cos^{-1} x + \cos^{-1} y + \cos^{-1} z = \pi$ , जहाँ  $-1 \leq x, y, z \leq 1$  हो, तो  $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz$  का मान ज्ञात कीजिए।

## Exercise - 3

### 3-A (स्तम्भ मिलान)

1. स्तम्भ मिलान कीजिए—
- | स्तम्भ - II  | स्तम्भ - I               |
|--|--------------------------|
| (A) $\tan \left( \cos^{-1} \frac{4}{5} + \tan^{-1} \frac{2}{3} \right)$ का मान है -    | (p) $\frac{17}{6}$       |
| (B) $\tan \left( 2 \tan^{-1} \frac{1}{5} - \frac{\pi}{4} \right)$ का सांख्यिक मान है - | (q) $\frac{-7}{17}$      |
| (C) $\cos \left( \frac{1}{2} \cos^{-1} \frac{1}{8} \right)$ का मान है -                | (r) $\frac{3}{4}$        |
| (D) $\cos \tan^{-1} \sin \cot^{-1} \left( \frac{1}{2} \right)$ का मान है -             | (d) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ |

2. स्तम्भ मिलान कीजिए—
- | स्तम्भ - I  | स्तम्भ - II                  |
|---|------------------------------|
| (A) $\sin^{-1} x - \cos^{-1} x$ पर अधिकतम है -          | (p) $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ |
| (B) $\sin^{-1} x)^2 + (\cos^{-1} x)^2$ पर अधिकतम है -   | (q) $x = 1$                  |
| (C) $(\tan^{-1} x)^2 + (\cot^{-1} x)^2$ पर न्यूनतम है - | (r) $x = -1$                 |
| (D) $(\tan^{-1} x)^2 + (\cot^{-1} x)^2$ पर न्यूनतम है - | (d) $x = 0$                  |

### 3-B (कथन/कारण)

3. **कथन-1:** यदि  $\alpha, \beta$  समीकरण  $6x^2 + 11x + 3 = 0$  के मूल हैं, तो  $\cos^{-1} \alpha$  विद्यमान है लेकिन  $\cos^{-1} \beta$  नहीं ( $\alpha > \beta$ ).  
**कथन-2:**  $\cos^{-1} x$  का प्रान्त  $[-1, 1]$  है।  
 (A) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है ; कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण है।

- (B) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है ; कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।  
 (C) कथन-1 सत्य है, कथन-2 असत्य है।  
 (D) कथन-1 असत्य है, कथन-2 सत्य है।

4. कथन-1:  $\tan^2(\sec^{-1} 2) + \cot^2(\operatorname{cosec}^{-1} 3) = 11$ .

कथन -2:  $\tan^2 \theta + \sec^2 \theta = 1 = \cot^2 \theta + \operatorname{cosec}^2 \theta$ .

- (A) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है ; कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण है।  
 (B) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है ; कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।  
 (C) कथन-1 सत्य है, कथन-2 असत्य है।  
 (D) कथन-1 असत्य है, कथन-2 सत्य है।

5. कथन-1 : यदि  $a > 0, b > 0, \tan^{-1}\left(\frac{a}{x}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{b}{x}\right) + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \sqrt{ab}$ .

कथन-2 : यदि  $m, n \in \mathbb{N}, n \geq m$  हो, तो  $\tan^{-1}\left(\frac{m}{n}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{m}{n}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{n-m}{n+m}\right) = \frac{\pi}{4}$ .

- (A) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है ; कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण है।  
 (B) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है ; कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।  
 (C) कथन-1 सत्य है, कथन-2 असत्य है।  
 (D) कथन-1 असत्य है, कथन-2 सत्य है।

3-C (अनुच्छेद)

6. अनुच्छेद

प्रतिलोम वृतीय फलनों के प्रान्त और परिसर नीचे परिभाषित किय गये हैं।

	प्रान्त	परिसर
$\sin^{-1}x$	$[-1, 1]$	$\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$
$\cos^{-1}x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$\tan^{-1}x$	$\mathbb{R}$	$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$
$\cot^{-1}x$	$\mathbb{R}$	$(0, \pi)$
$\operatorname{cosec}^{-1}x$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	$\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] - \{\pi\}$
$\sec^{-1}x$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	$[0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

6.1  $\sin^{-1}x < \frac{3\pi}{4}$ , तो  $x$  के हलों का समुच्चय है।

- (A)  $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$  (B)  $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$  (C)  $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$  (D) इनमें से कोई नहीं

- 6.2  $x = -1$  पर  $\sin^{-1} x + \operatorname{cosec}^{-1} x$  बराबर है—  
 (A)  $\pi$  (B)  $2\pi$  (C)  $3\pi$  (D)  $-\pi$
- 6.3 यदि  $x \in [-1, 1]$ , तो  $\tan^{-1}(x)$  का परिसर है।  
 (A)  $\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$  (B)  $\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$  (C)  $[-\pi, 0]$  (D)  $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

7. अनुच्छेद

$$\tan^{-1}(\tan \theta) = \begin{cases} \pi + \theta, & -\frac{3\pi}{2} < \theta < -\frac{\pi}{2} \\ \theta, & -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \\ -\pi + \theta, & \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \end{cases}, \sin^{-1}(\sin \theta) = \begin{cases} -\pi - \theta, & -\frac{3\pi}{2} \leq \theta < -\frac{\pi}{2} \\ \theta, & -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - \theta, & \frac{\pi}{2} < \theta \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$$\cos^{-1}(\cos \theta) = \begin{cases} -\theta, & -\pi \leq \theta \\ \theta, & 0 \leq \theta \leq \pi \\ 2\pi - \theta, & \pi < \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

उपरोक्त परिणामों के आधार पर निम्न के उत्तर दीजिए —

- 7.1  $\cos^{-1} x$  बराबर है—  
 (A)  $\sin^{-1} \sqrt{1-x^2}$  यदि  $-1 < x < 1$  (B)  $-\sin^{-1} \sqrt{1-x^2}$  यदि  $-1 < x < 0$   
 (C)  $\sin^{-1} \sqrt{1-x^2}$  यदि  $-1 < x < 0$  (D)  $\sin^{-1} \sqrt{1-x^2}$  यदि  $0 < x < 1$
- 7.2  $\sin^{-1} x$  बराबर है—  
 (A)  $\cos^{-1} \sqrt{1-x^2}$  यदि  $-1 < x < 0$  (B)  $\cos^{-1} \sqrt{1-x^2}$  यदि  $-1 < x < 1$   
 (C)  $\cos^{-1} \sqrt{1-x^2}$  यदि  $0 < x < 1$  (D)  $-\cos^{-1} \sqrt{1-x^2}$  यदि  $0 < x < 1$
- 7.3  $\cos^{-1} x$  बराबर है—  
 (A)  $-\tan^{-1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$  यदि  $-1 < x < 0$  (B)  $\tan^{-1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$  यदि  $-1 < x < 0$   
 (C)  $-\tan^{-1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$  यदि  $0 < x < 1$  (D)  $\pi + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$  यदि  $-1 < x < 0$

.....  
**3-D (सत्य/असत्य कथन)**  
 .....

8. कोणों  $A = 2 \tan^{-1}(2\sqrt{2} - 1)$  और  $B = 3 \sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$  में से बड़ा कोण A है।

9. व्यंजक  $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2} \tan 2A\right) + \tan^{-1}(\cot A) + \tan^{-1}(\cot^3 A)$  का मान  $0 < A < (\pi/4)$  के लिए A से स्वतंत्र है।

10. असमिका  $\sin^{-1}(\sin 5) > x^2 - 4x$  सभी  $x > 2 + \sqrt{9 - 2\pi}$  के लिए सत्य है।

11. यदि  $\sum_{i=1}^{2n} \sin^{-1}x_i = n\pi$  तो  $\sum_{i=1}^{2n} \frac{n(n+1)}{2}$

12. यदि  $|x| > 1$  तो  $\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \pi - 2 \tan^{-1} x$ .

3-E (रिक्त स्थान की पूर्ति)

13. माना a,b,c तीन धनात्मक वास्तविक संख्याएँ है और

$$\theta = \tan^{-1} \sqrt{\frac{a(a+b+c)}{bc}} + \tan^{-1} \sqrt{\frac{b(a+b+c)}{ca}} + \tan^{-1} \sqrt{\frac{c(a+b+c)}{ab}}$$
 तो  $\theta$  बराबर है-

14. यदि  $f(x) = e^{\cos^{-1} \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}$ , तो  $f\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$  का मान बराबर ..... है।

15.  $\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) - \cos^{-1}\left(\frac{12}{13}\right)$  का मान arc sin के पदों में होगा .....।

16.  $\sin^{-1} \sqrt{\frac{x}{1+x}} - \sin^{-1} \frac{x-1}{x+1} = \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{1+x}}$  का हल..... है।

17. समीकरण  $\sqrt{1 + \cos 2x} = \sqrt{2} \sin^{-1}(\sin x)$  का  $-\pi \leq x \leq \pi$  के लिए वास्तविक हलों की संख्या ..... है।

## Exercise - 4

### 4-A (पूर्ववर्ती JEE परीक्षा प्रश्न)

#### IIT - JEE - 2008

1. यदि  $0 < x < 1$ , तब  $\sqrt{1+x^2} [\{x \cos(\cot^{-1} x) + \sin(\cot^{-1} x)\}^2 - 1]^{1/2} =$

(A)  $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

(B) x

(C)  $x\sqrt{1+x^2}$

(D)  $\sqrt{1+x^2}$

#### IIT-JEE-2007

2. माना कि  $(x, y)$  इस प्रकार है कि  $\sin^{-1}(ax) + \cos^{-1}(y) + \cos^{-1}(bxy) = \frac{\pi}{2}$

**कॉलम (Column) II** में दिये गये वक्तव्यों को **कॉलम Column - II** में दिये गये वक्तव्यों से सुमेल करायें। अपना उत्तर ORS में दिया गया  $4 \times 4$  मैट्रिक्स के उचित बुल्लों (bubbles) का काला करके दर्शाएं।

**कॉलम - I**

- (A) यदि  $a = 1$  तथा  $b = 0$ , तब  $(x, y)$   
 (B) यदि  $a = 1$  तथा  $b = 1$ , तब  $(x, y)$   
 (C) यदि  $a = 1$  तथा  $b = 2$ , तब  $(x, y)$   
 (D) यदि  $a = 2$  तथा  $b = 2$ , तब  $(x, y)$

**कॉलम -II**

- (p) वृत्त  $x^2 + y^2 = 1$  स्थित है  
 (q)  $(x^2 - 1)(y^2 - 1) = 0$  पर स्थित है  
 (r)  $y = x$  पर स्थित है  
 (s)  $(4x^2 - 1)(y^2 - 1) = 0$  पर स्थित है।

**IIT-JEE-2004**

3.  $x$  का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए  $\sin(\cos^{-1}(1+x)) = \cos(\tan^{-1} x)$  है—

- (A)  $1/2$  (B) 1 (C) 0 (D)  $-1/2$

**IIT-JEE-2002**

4. सिद्ध कीजिए कि  $\cos \tan^{-1} \sin \cos^{-1} x = \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2 + 2}}$ .

**IIT-JEE-2001**

5. यदि  $0 < |x| < \sqrt{2}$  के लिए  $\sin^{-1}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} - \dots\right) + \cos^{-1}\left(x^2 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^6}{4} - \dots\right) = \frac{\pi}{2}$  हो तो  $x$  का मान है —

- (A)  $\frac{1}{2}$  (B) 1 (C)  $-\frac{1}{2}$  (D) -1

**IIT-JEE-1999**

6.  $\tan^{-1} \sqrt{x(x+1)} + \sin^{-1} \sqrt{x^2 + x + 1} = \frac{\pi}{2}$  के वास्तविक हलों की संख्या है—

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) अनन्त

**IIT-JEE-1994**

7. यदि हम प्रतिलोग त्रिकोणमितिय फलनों के केवल मुख्य मानों को ही ले तो  $\tan\left(\cos^{-1} \frac{1}{5\sqrt{2}} - \sin^{-1} \frac{4}{\sqrt{17}}\right)$  का मान बराबर होगा—

- (A)  $\frac{\sqrt{29}}{3}$  (B)  $\frac{29}{3}$  (C)  $\frac{\sqrt{3}}{29}$  (D)  $\frac{3}{29}$

4-B (पूर्ववर्ती AIEEE/DCE परीक्षा प्रश्न)

8. यदि  $\sin^{-1}\left(\frac{x}{5}\right) + \cos \operatorname{ec}^{-1}\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$ , तो  $x$  का मान है—

- (A) 1 (B) 3 (C) 4 (D) 5

9. यदि  $\cos^{-1} x - \cos^{-1} \frac{y}{2} = \alpha$  हो, तो  $4x^2 - 4xy \cos \alpha + y^2$  बराबर है—  
 (A)  $-4 \sin^2 \alpha$  (B)  $4 \sin^2 \alpha$  (C) 4 (D)  $2 \sin^2 \alpha$
10.  $x$  का मान जो  $\sin^{-1} x + \sin^{-1}(1-x) = \cos^{-1} x$  को संतुष्ट करता है—  
 (A)  $0, \frac{1}{2}$  (B) 0 (C) 1, -1 (D) इनमें से कोई नहीं
11. जब  $y = \sin^{-1}\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)$ ,  $x = \tan^{-1}\left(\frac{2t}{1-t^2}\right)$  जहाँ  $-1 < t < 1$ , तो  $\frac{dy}{dx}$  बराबर है—  
 (A)  $\infty$  (B) -1 (C) 1 (D) 0

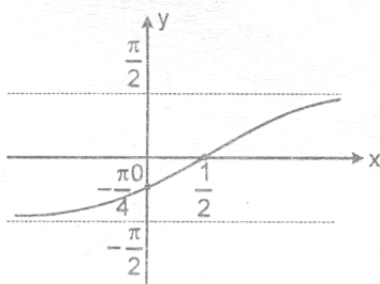
## Answers

### EXERCISE # 1- A

1. B 2. D 3. C 4. D 5. B 6. D 7. D (iii)
8. B 9. D 10. B 11. C 12. A 13. B 14. B
15. B 16. C 17. A 18. D 19. AB 20. CD
21. BD
4. (i)  $-\sin 1 < x \leq 1$  (ii)  $\cos 2 < x \leq 1$   
 (iii) no solution.

### EXERCISE # 1- B

1. (i)  $-\frac{\pi}{6}$  (ii)  $\frac{\pi}{6}$  (iii)  $-\frac{\pi}{3}$  (iv)  $\frac{3\pi}{4}$  (v)  $\frac{2\pi}{3}$  (vi)  $\frac{1+3\sqrt{5}}{8}$  (vii)  $\frac{6-4\sqrt{5}}{15}$
2. (i) 1 (ii)  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  (iii)  $\frac{\pi}{6}$
3. (i) (ii)
4. 2
5. (i)  $\frac{4}{5}$  (ii)  $2\sqrt{2}$  (iii)  $\frac{\sqrt{41}}{4}$  (iv)  $\frac{63}{16}$
6. 2
7. (i)  $-\frac{\pi}{6}$  (ii)  $-\frac{\pi}{3}$  (iii)  $\frac{3\pi}{4}$  (iv)  $\frac{\pi}{4}$
8. (i)  $5 - 2\pi$  (ii)  $4\pi - 10$  (iii)  $2\pi - 6$   
 (iv)  $4\pi - 10$  (v)  $\frac{17\pi}{20}$



9.  $\sin^{-1}(\sin \theta) = \begin{cases} \theta - 2\pi, & \frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{2}; \\ 3\pi - \theta, & \frac{5\pi}{2} < \theta \leq 3\pi \end{cases}$

$$\cos^{-1}(\cos \theta) = \begin{cases} 2\pi - \theta, & \frac{3\pi}{2} \leq \theta < 2\pi; \\ \theta - 2\pi, & 2\pi \leq \theta \leq 3\pi \end{cases}$$

$$\tan^{-1}(\tan \theta) = \begin{cases} \theta - 2\pi, & \frac{3\pi}{2} < \theta < \frac{5\pi}{2}; \\ \theta - 3\pi, & \frac{5\pi}{2} < \theta \leq 3\pi \end{cases}$$

$$\cot^{-1}(\cot \theta) = \begin{cases} \theta - \pi, & \frac{3\pi}{2} \leq \theta < 2\pi \\ \theta - 2\pi, & 2\pi < \theta < 3\pi \end{cases}$$

10. (i) 0 (ii) 1 (iii)  $\frac{1}{2\sqrt{2}}$  12.  $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

13.  $x = 3$ . 14. (i)  $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$  (ii)  $x = \frac{1}{2}$

15. (i)  $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$  (ii)  $x = 2$  16.  $\frac{1+xy}{x-y}$

17.  $\frac{\pi}{2}$

**EXERCISE # 2-A**

1. C 2. D 3. D 4. B 5. B 6. B 7. B

8. A 9. B 10. BCD 11. CD 12. ABC

13. AC 14. AD

**EXERCISE # 2-B**

1.  $X = Y = \sqrt{3 - a^2}$  2. (i)  $\frac{\pi}{3}$  (ii)  $2 \cos^{-1} \frac{1}{3} - \frac{\pi}{3}$

4.  $\frac{\pi ab + c(a-b)}{a+b}$

5. (i)  $[-1, 0)$  (ii)  $x > 1$  (iii)  $(-\infty, \cot 3) \cup (\cot 2, \infty)$

6. Infinite 7.  $x = ab$

9. (i)  $\tan^{-1}(x+n) + \tan^{-1} x$  (ii)  $\frac{\pi}{4}$  (iii)  $\frac{\pi}{2}$

10. Two solutions (1, 2) (2, 7) 11.  $-\pi$

12. 1

**EXERCISE # 3**

1. (A)  $\rightarrow$  (p), (B)  $\rightarrow$  (q) (C)  $\rightarrow$  (r) (D)  $\rightarrow$  (s)

2. (A)  $\rightarrow$  (p), (B)  $\rightarrow$  (p) (C)  $\rightarrow$  (q)

3. A 4. D 5. B 6.1 A 6.2 C 6.3 B 7.1 D

7.2 C 7.3 D 8. सत्य 9. सत्य 10. असत्य

11. असत्य 12. असत्य 13.  $\pi$  14.  $e^{\pi/12}$

15.  $\sin^{-1}\left(\frac{16}{65}\right)$  16.  $x \geq 0$  17. 2

**EXERCISE # 4**

1. C

2. (A)  $\rightarrow$  (p), (B)  $\rightarrow$  (q) (C)  $\rightarrow$  (p) (D)  $\rightarrow$  (s)

3. D 5. B 6. C 7. D 8. B 9. B 10. B

11. C

## MQB

### EXERCISE # 1 (बहुविकल्पीय प्रश्न)

केवल एक विकल्प सही

1.  $\cos^{-1}\left\{\frac{1}{2}x^2 + \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\right\} = \cos^{-1}\frac{x}{2} - \cos^{-1}x$  सन्तुष्ट होता है यदि-  
 (A)  $|x| \leq 1$  (B)  $x \in \mathbb{R}$  (C)  $0 \leq x \leq 1$  (D)  $-1 \leq x \leq 0$
2. समीकरण  $\tan^{-1}(1+x) + \tan^{-1}(1-x) = \frac{\pi}{2}$  का एक हल है-  
 (A)  $x = 1$  (B)  $x = -1$  (C)  $x = 0$  (D)  $x = \pi$
3.  $a$  के मानों का समुच्चय जिनके लिए  $x^2 + ax + \sin^{-1}(x^2 - 4x + 5) + \cos^{-1}(x^2 - 4x + 5) = 0$  का कम से कम एक हल हो, है-  
 (A)  $(-\infty, -\sqrt{2\pi}] \cup [\sqrt{2\pi}, \infty)$  (B)  $(-\infty, -\sqrt{2\pi}) \cup (\sqrt{2\pi}, \infty)$   
 (C)  $\mathbb{R}$  (D) इनमें से कोई नहीं
4.  $p$  एवं  $q$  के सभी संभव मान जिनके लिए  $\cos^{-1}\sqrt{p} + \cos^{-1}\sqrt{1-p} + \cos^{-1}\sqrt{1-q} = \frac{3\pi}{4}$  संतुष्ट हो, तै-  
 (A)  $p = 1, q = \frac{1}{2}$  (B)  $q > 1, q = \frac{1}{2}$  (C)  $0 \leq p \leq 1, q = \frac{1}{2}$  (D) इनमें से कोई नहीं
5. निम्नलिखित में से कौन सा एक सही है ?  
 (A)  $\tan 1 > \tan^{-1} 1$  (B)  $\tan 1 < \tan^{-1} 1$  (C)  $\tan 1 = \tan^{-1} 1$  (D) इनमें से कोई नहीं
6. समीकरण  $\sin^{-1}(1-x) - 2 \sin^{-1} x = \frac{\pi}{2}$  के हलों की संख्या है-  
 (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) दो से अधिक
7. यदि  $[\cot^{-1} x] + [\cos^{-1} x] = 0$  जहाँ  $[.]$  महत्तम पूर्णांक फलन को प्रदर्शित करता हो, तो  $x$  के मानों का सम्पूर्ण समुच्चय है-  
 (A)  $(\cos 1, 1]$  (B)  $(\cot 1, \cos 1)$  (C)  $(\cot 1, 1]$  (D) इनमें से कोई नहीं
8.  $\cot^{-1} 3 + \operatorname{cosec}^{-1} \sqrt{5}$  का मान है-  
 (A)  $\frac{\pi}{2}$  (B)  $\frac{\pi}{2}$  (C)  $\frac{\pi}{4}$  (D)  $\frac{\pi}{6}$
9. यदि  $u = \cot^{-1} \sqrt{\tan \alpha} - \tan^{-1} \sqrt{\tan \alpha}$  हो, तो  $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right)$  का मान है-  
 (A)  $\sqrt{\tan \alpha}$  (B)  $\sqrt{\cot \alpha}$  (C)  $\tan \alpha$  (D)  $\cot \alpha$



10.  $\tan^{-1}\left(\frac{a}{b+c}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{b}{c+a}\right)$  का मान है यदि त्रिभुज ABC में  $\angle C = 90^\circ$  हो—  
 (A)  $\frac{\pi}{4}$  (B)  $\frac{\pi}{3}$  (C)  $\frac{\pi}{2}$  (D)  $\pi$
11. समीकरण  $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2x+1}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{4x+1}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{x^2}\right)$  के हलों की संख्या है—  
 (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3
12.  $\cos\left(\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1}{8}\right)$  का मान है—  
 (A)  $3/4$  (B)  $-3/4$  (C)  $1/16$  (D)  $1/4$

एक सक अधिक विकल्प सही

13. यदि  $a = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$  एवं  $b = \tan^{-1}(-\sqrt{3}) - \cot^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$  हो, तो —  
 (A)  $a - b = 17\pi/12$  (B)  $a + b = 17\pi/12$   
 (C)  $a + b = -17\pi/12$  (D)  $a - b = \pi/12$
14. तीन कोण  $\alpha, \beta$  एवं  $\gamma$  निम्न प्रकार दिए जाते हैं—  
 $a = 2 \tan^{-1}(\sqrt{2} - 1), \beta = 3 \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} + \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$  एवं  $\gamma = \cos^{-1}\frac{1}{3}$ , तब —  
 (A)  $\alpha > \beta$  (B)  $\beta > \gamma$  (C)  $\alpha < \gamma$  (D)  $\alpha > \gamma$
15. माना  $f(x) = \sin^{-1}x + \cos^{-1}x$ . तब  $\frac{\pi}{2}$  —  
 (A)  $f\left(\frac{1}{2}\right)$  (B)  $f(k^2 - 2k + 3), k \in \mathbb{R}$   
 (C)  $f\left(\frac{1}{1+k^2}\right), k \in \mathbb{R}$  (D)  $f(-2)$
16. समीकरण  $2x = \tan(2 \tan^{-1}a) + 2 \tan(\tan^{-1}a + \tan^{-1}a^3)$  के लिए निम्नलिखित में से कौनसा अमान्य है?  
 (A)  $a^2x + 2a = x$  (B)  $x^2 + 2ax + 1 = 0$  (C)  $a \neq 0$  (D)  $a \neq -1, 1$
17. यदि  $\tan(\cos^{-1}(4/5) + \tan^{-1}(2/3))$  का संख्यात्मक मान  $a/b$  हो, तो —  
 (A)  $a + b = 23$  (B)  $a - b = 11$  (C)  $3b = a + 1$  (D)  $2a = 3b$
18. यदि  $\operatorname{cosec}^{-1}x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$  हो, तो  $x$  का मान हो सकता है—

(A) 1

(B)  $-\frac{1}{2}$

(C)  $\frac{3}{2}$

(D)  $-\frac{3}{2}$

.....  
**EXERCISE # 2 (विषयात्मक प्रश्न)**  
 .....

1. दर्शाइये कि त्रिघातीय समीकरण  $x(x - 2) = 2$  के मूल  $r, s$  और  $t$  वास्तविक और धनात्मक है तथा  $\tan^{-1}(r) + \tan^{-1}(s) + \tan^{-1}(t)$  का मान भी ज्ञात कीजिए।
2. यदि  $x = \sin(2 \tan^{-1} 2)$  एवं  $y = \sin\left(\frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{4}{3}\right)$  हो, तो  $x$  एवं  $y$  में सम्बन्ध ज्ञात कीजिए।
3. यदि  $\text{arc sin } x + \text{arc sin } y + \text{arc } (x, y, x > 0) \text{ sin } z = \pi$  हो, तो प्रदर्शित कीजिए कि—
  - (i)  $x\sqrt{1+x^2} + y\sqrt{1-y^2} + z\sqrt{1-z^2} = 2xyz$
  - (ii)  $x^4 + y^4 + z^4 + 4x^2y^2z^2 = 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)$
4. यदि  $\sin^{-1} \frac{x}{a} + \sin^{-1} \frac{y}{b} = \sin^{-1} \frac{c^2}{ab}$  हो, तो प्रदर्शित कीजिए कि  $b^2x^2 + 2xy\sqrt{a^2b^2 - c^4} + a^2y^2 = c^4$
5. सिद्ध कीजिए कि —
  - (i)  $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{10}-1}{3\sqrt{2}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$
  - (ii)  $2 \tan^{-1}(\text{cosec}^{-1} x - \tan \cot^{-1} x) = \tan^{-1} x$  (जहाँ  $x \neq 0$ )
  - (iii)  $\cos^{-1}\left(\frac{63}{65}\right) + 2 \tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$
  - (iv)  $\tan(\tan^{-1} x + \tan^{-1} y + \tan^{-1} z) = \cot(\cot^{-1} x + \cot^{-1} y + \cot^{-1} z)$
6. यदि  $X = \frac{1}{1} \tan^{-1}(1) + \frac{1}{2} \tan^{-1}(2) + \frac{1}{3} \tan^{-1}(3)$ ;  $Y = 1 \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) + 2 \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + 3 \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$  हो, तो  $(X - Y)$  का मान ज्ञात कीजिए।
7. निम्नलिखित असमिकाओं को हल कीजिए —
  - (i)  $\tan^2(\text{arc sin } x) > 1$
  - (ii)  $\tan^{-1} 2x \geq 2 \tan^{-1} x$
  - (iii) निकाय  $\text{arc tan}^2 x - 3 \text{arc tan } x + 2 > 0$  और  $[\sin^{-1} x] > [\cos^{-1} x]$  जहाँ  $[\ ]$  महत्तम पूर्णांक व फलन को प्रदर्शित करता है।
8. नीचे दी गई सम्मिश्र श्रेणियों का  $n$  पदों तक का योग ज्ञात कीजिए और तब अनन्त पदों का योग भी ज्ञात कीजिए।

(i)  $\cot^{-1} \frac{31}{12} + \cos^{-1} \frac{139}{12} + \cot^{-1} \frac{319}{12} + \dots + \cot^{-1} \left( 3n^2 - \frac{5}{12} \right)$

(ii)  $\tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{8} + \tan^{-1} \frac{1}{18} + \dots + \tan^{-1} \frac{1}{2n^2}$ .

9. यदि  $\theta = \tan^{-1}(2 \tan^2 \theta) - \frac{1}{2} \sin^{-1} \left( \frac{3 \sin 2\theta}{5 + 4 \cos 2\theta} \right)$  हो, तो  $\theta$  का व्यापक मान ज्ञात कीजिए।

10. मुख्य मानों का उपयोग करके  $3 \tan^{-1} \left( \frac{1}{2} \right) + 2 \tan^{-1} \left( \frac{1}{5} \right) + \sin^{-1} \frac{142}{65\sqrt{5}}$  को एक कोण में लिखिए।

11.  $\sin^{-1} \frac{ax}{2} + \sin^{-1} \frac{bx}{c} = \sin^{-1} x$ , जहाँ  $a^2 + b^2 = c^2, c \neq 0$  को हल कीजिए।

12. सिद्ध कीजिए कि  $\cos^{-1} \left[ 1 - \frac{1 - \cos x}{12 \cos x + 13} \right] = \pi - 2 \cot^{-1} \left( \frac{1}{5} \tan \frac{x}{2} \right)$  जहाँ  $x \in (0, \pi)$



# Answers

**EXERCISE # 1**

1. C 2. C 3. D 4. C 5. A 6. B 7. C  
 8. C 9. A 10. A 11. B 12. A 13. AC  
 14. BC 15. AC 16. BC 17. ABC 18. ACD

**EXERCISE # 2**

2.  $X = 4Y^2$       6.  $-\frac{5\pi}{8} + \frac{5}{6} \tan^{-1} 3$

7. (i)  $\left( \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right) \cup \left( -1, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$       (ii)  $x \leq 0$

8. (i)  $n$  पदों का योगफल  $= \cot^{-1} \frac{18n+13}{12n}$  अनन्त  
 पदों का योगफल  $= \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left( \frac{3}{2} \right)$   
 (ii)  $n$  पदों का योगफल  $= \tan^{-1} \frac{n}{n+1}$  और अनन्त  
 पदों का योगफल  $= \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(1)$   
 9.  $\theta = n\pi, n\pi + (\pi/4), n\pi - \tan^{-1} 2$  where  $n \in I$   
 10.  $\pi$       11.  $x \in \{-1, 0, 1\}$

**for 39 Yrs. Que. of IIT-JEE  
 &  
 15 Yrs. Que. of AIEEE  
 we have distributed already a book**